CANPOINT®

导学案★

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

细分课时

分层设计

夯实基础

突出重点

选择性必修第二册 RJA

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

04 第四章　数列
PART FOUR

05 第五章　一元函数的导数及其应用

PART FIVE

导学案 LEARN

第四章 数列

4.1 数列的概念

第 1 课时 数列的概念与表示

【学习目标】

1. 了解数列的概念,知道什么是数列,能说出数列的项.

2. 了解数列的表示方法,会用表格、图象、通项公式表示数列,能用通项公式求任意项或根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

3. 了解数列与函数的关系,能用函数的观点看待数列,并能说出数列与函数的共性与差异.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 数列及其有关概念**

1. 数列

按照确定的________排列的一列数称为数列.

2. 数列的项

数列中的__________叫作这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫作这个数列的第 1 项,常用符号________表示,第二个位置上的数叫作这个数列的第 2 项,用________表示……第 n 个位置上的数叫作这个数列的第 n 项,用________表示.其中第 1 项也叫作________.

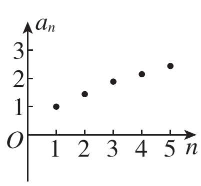
3. 数列的表示

(1)数列的一般形式是 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,简记为________.

(2)表格表示,如下表.

n	1	2	3	…
a_n	a_1	a_2	a_3	…

(3)图象表示,如图.



4. 数列的分类

(1)按项的个数分类

类别	含义
有穷数列	项数________的数列
无穷数列	项数________的数列

(2)按项的变化趋势分类

类别	含义
递增数列	从第 2 项起,每一项都________它的前一项的数列
递减数列	从第 2 项起,每一项都________它的前一项的数列
常数列	各项都________的数列

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)李萍从 6 岁到 18 岁,每年生日那天测量体重,依次排成一列数,可以构成数列. ( )

(2)数列 $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots$ 是递减数列且是无穷数列. ( )

(3)数列 1,3,5,7,9 与数列 9,7,5,3,1 是同一个数列. ( )

◆ **知识点二 数列的通项公式**

1. 定义:如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与它的序号________之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的__________.

2. 作用:①求数列的任意一项;②检验某数是否是该数列中的一项.

3. 数列的通项公式与函数解析式的关系比较

	函数	数列
定义域	**R** 或 **R** 的子集	正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)
解析式	$y=f(x)$	$a_n=f(n)$
值域	y 的取值范围	由自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值构成
表示方法	解析法、列表法、图象法	通项公式(解析法)、列表法、图象法

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\begin{cases}3\times 2^{n-1}(n\text{ 是偶数}),\\ 3n-2(n\text{ 是奇数}),\end{cases}$则$a_3>a_4$. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$,则数列$\{a_n\}$的图象与函数$y=2x-1$的图象相同. ( )

(3)若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2^n+3$,则 11 是数列中的项. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 数列的概念与分类

例 1 已知下列数列:①$1,0.84,0.84^2,0.84^3$;②$2,4,6,8,10,\cdots,2n,\cdots$;③$7,7,7,7,\cdots$;④$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$;⑤$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$;⑥$0,-1,2,-3,4,-5,\cdots$.

其中,有穷数列是________,无穷数列是________,递增数列是________,递减数列是________,常数列是________.(填序号)

[素养小结]

判断数列的类型应注意的几个方面:(1)判断一个数列是有穷数列还是无穷数列的关键是判断数列的项数是有限的还是无限的;(2)判断一个数列的单调性一般是根据数列中的a_{n+1}与a_n的大小来判断,即①若数列$\{a_n\}$满足$a_n<a_{n+1}$,则是递增数列,②若数列$\{a_n\}$满足$a_n>a_{n+1}$,则是递减数列.

◆ 探究点二 已知通项公式写数列的项

例 2 根据数列$\{a_n\}$的通项公式,写出数列的前 5 项,并用图象表示出来.

(1)$a_n=\frac{1}{2}n-1$;

(2)$a_n=\sin\frac{(n+2)\pi}{2}$.

[素养小结]

数列$\{a_n\}$的通项公式给出了第n项a_n与它的位置序号n之间的关系,只要用序号代替公式中的n,就可以求出数列中相应的项.

◆ 探究点三 已知数列的项写通项公式

例 3 写出下列数列的一个通项公式.

(1)$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$;

(2)$\frac{1}{1\times 2},-\frac{1}{2\times 3},\frac{1}{3\times 4},-\frac{1}{4\times 5},\cdots$;

(3)$\frac{3}{2},1,\frac{7}{10},\frac{9}{17},\cdots$.

变式 1 根据数列的前几项,写出下列各数列的一个通项公式:

(1)$9,99,999,9999,\cdots$;

(2)$\sqrt{3},3,\sqrt{15},\sqrt{21},\cdots$.

变式 2 (1)[2024·河北邢台高二期中]已知数列$\{a_n\}$的前4项分别为$-1+\frac{1}{2^2}$,$2-\frac{3}{4^2}$,$-3+\frac{5}{6^2}$,$4-\frac{7}{8^2}$,则该数列的一个通项公式为 ( )

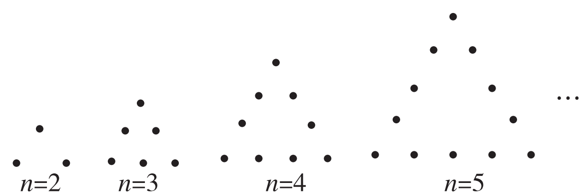
A. $a_n=(-1)^n n+(-1)^n\frac{2n-1}{4n^2}$

B. $a_n=(-1)^n n-(-1)^n\frac{2n+1}{4n^2}$

C. $a_n=(-1)^n n-(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2n^2}$

D. $a_n=(-1)^n n+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{4n^2}$

(2)如图所示,将若干个点摆成三角形图案,每条边(包括两个端点)有$n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$个点,相应的图案中所有点的个数记为$a_n$,则$a_n=$__________.



(3)请写出数列1,0,1,0,…的至少3个通项公式.

[素养小结]

根据数列的前几项猜想数列的通项公式,若所给前几项为分数,则可分别观察分子组成的数列特征与分母组成的数列特征.若所给前几项为正负相间的项,则可用-1的幂进行符号调节.当猜想的难度较大,不易猜出时,可尝试以下方法将数列转化为易于猜想的数列:对数列的各项同时进行加、减、乘、除同一数;对数列各项分别加、减、乘、除该项的项数;将各项分解为若干项的和、差、积、商等形式.如猜想2,5,9,17的通项公式,可采取各项减1变化为1,4,8,16.

◆ 探究点四 数列通项公式的简单应用

例 4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1)写出数列$\{a_n\}$的第4项和第6项.

(2)-49和68是否为该数列的项?

(3)数列$\{a_n\}$中有多少个负数项?

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{3n-2}{3n+1}$.

(1)求这个数列的第10项.

(2)在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内是否存在数列$\{a_n\}$中的项?若存在,有几项?若不存在,请说明理由.

[素养小结]

判断某个数是否为数列中的项,需先假设它是数列中的项,然后列方程求解.若方程有正整数解,则该数是数列中的项;若方程无解或解均不是正整数,则该数不是数列中的项.

拓展 [2024·苏州常熟外国语学校高二月考]已知$a_n=\frac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{a_n\}$前50项中的最小项和最大项分别是 ( )

A. a_1,a_{50} B. a_1,a_8

C. a_8,a_9 D. a_9,a_{50}

第 2 课时　数列的递推公式与前 n 项和

【学习目标】

1. 会用递推公式表示数列,能根据数列的递推公式写出数列的前几项.
2. 了解数列的前 n 项和,并能利用 S_n 与 a_n 的关系解决一些简单问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　数列的递推公式

概念:如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的__________.

作用:知道了首项或前几项,以及递推公式,就能求出数列的每一项.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)所有的数列都有递推公式.　(　　)

(2)数列的递推公式是关于 n 的函数关系式.　(　　)

(3)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$,$a_{n+1}=2a_n-2$,则 $a_2=4$.　(　　)

2. 仅由数列 $\{a_n\}$ 的递推公式 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$ 能否确定这个数列?若再已知 $a_2=3$ 呢?

◆ 知识点二　数列的前 n 项和

1. 概念及表示

我们把数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项止的各项之和,称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,记作 S_n,即 $S_n=$________________.

2. 数列的前 n 项和公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个__________来表示,那么这个________叫作这个数列的前 n 项和公式.

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和 S_n 的关系

在数列 $\{a_n\}$ 中,S_n 为其前 n 项和,显然 $S_1=a_1$,而 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}(n\geqslant 2)$,于是 $a_n=\begin{cases}\underline{\qquad\qquad},n=1,\\ \underline{\qquad\qquad\quad},n\geqslant 2.\end{cases}$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n+1$,则 $a_1=4$,$a_4=3$.　(　　)

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+1$,则 $a_n=2n-1$.　(　　)

(3)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $a_3+a_4+a_5+a_6=S_6-S_2$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　递推公式

例 1　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$,写出它的前 5 项,并归纳出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

变式　已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n}{n+1}$.

(1)写出数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项;

(2)猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

[素养小结]

(1)递推公式的作用:已知数列的某一项,利用递推公式可以写出数列的每一项.对于具有周期性的数列,一般利用递推公式写出几项就能发现其周期变化规律.

(2)递推公式与通项公式的区别:递推公式揭示了数列的相邻项之间的关系,已知前面的项可以递推出后面的项;通项公式揭示了项与其序号之间的关系,把序号代入通项公式可以直接求出该项.

(3)某些用递推公式给出的数列,写出数列的前几项后,由前几项分析其特点、规律,即可归纳总结出数列的一个通项公式.

(4)形如$a_{n+1}-a_n=f(n)$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$的递推关系,可以利用累加法或累乘法求出通项公式.

拓展 (1)已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}$,且$a_1=\frac{1}{3}$,则$a_3=$ ( )

A. 1 B. 3 C. 9 D. $\frac{1}{3}$

(2)数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$,$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_{2025}=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. 3 C. -2 D. $-\frac{1}{3}$

◆ 探究点二 数列的前n项和

例2 (1)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=2^n$,则$a_4+a_5=$ ( )

A. 48 B. 32

C. 24 D. 8

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,则数列$\{a_n\}$的前3项和$S_3=$________.

变式 (1)定义$\frac{n}{p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n}$为$n$个正数$p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$的"均倒数".若已知数列$\{a_n\}$的前$n$项的"均倒数"为$\frac{1}{5n}$,则$a_{10}$等于 ( )

A. 85 B. 90 C. 95 D. 100

(2)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=an^2$,若$S_{10}=600$,则$a_3-a_5-a_6=$________.

[素养小结]

对于已知数列的前n项和公式求数列的某一项问题,主要利用定义解决.

◆ 探究点三 利用数列的前n项和公式求通项公式

例3 下面给出了数列$\{a_n\}$的前n项和S_n,求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)$S_n=2n^2-3n$;

(2)$S_n=4-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

变式 (1)(多选题)[2024·重庆八中高二月考]数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_n=-n^2+7n$,则下列说法正确的是 ( )

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. $a_n=-2n+8$

C. 当$n>4$时,$a_n<0$

D. 当$n=3$或4时,S_n取得最大值

(2)[2024·上海格致中学高二月考]已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n-2$(n为正整数),则此数列的通项公式为$a_n=$________.

[素养小结]

已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n求解通项公式时,一般先根据$a_1=S_1$求出a_1,再根据$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$计算出当$n\geqslant 2$时的通项公式,然后验证$a_1$是否满足上式,由此决定数列$\{a_n\}$的通项公式是否需要分段书写.

拓展 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=3^n$,求$a_n$.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

第1课时 等差数列的概念与通项公式

【学习目标】

1. 理解等差数列的概念,能用文字语言、符号语言、图形语言描述等差数列的概念,能根据等差数列的定义判断或证明已知数列是否是等差数列.

2. 理解等差数列的通项公式,能根据定义归纳出等差数列的通项公式,会用通项公式解决一些简单问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 等差数列的有关概念与表示**

1. 等差数列与公差:如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫作________数列,这个常数叫作等差数列的________,公差通常用字母 d 表示.

以上定义用符号表示为____________(d 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$).等差数列的定义用符号语言表示,其本质是等差数列的递推公式.

2. 等差中项:由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列,这时,A 叫作 a 与 b 的__________,并且 $2A=a+b$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若一个无穷数列 $\{a_n\}$ 的前4项分别是1,2,3,4,则它一定是等差数列. ( )

(2)若一个数列从第2项起每一项与它前一项的差都是常数,则这个数列一定是等差数列.

(3)任意两个实数都存在等差中项. ( )

(4)若 a,b,c 是等差数列,则 $c+a=2b$. ( )

(5)当数列 $\{a_n\}$ 为常数列时,数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列. ( )

◆ **知识点二 等差数列的通项公式及应用**

1. 通项公式:若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,公差为 d,则其通项公式为 $a_n=$____________.

2. 等差数列的图象:等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可写成 $a_n=dn+(a_1-d)$.点 (n,a_n) 分布在一条以 d 为斜率的直线上,是这条直线上一列________.

3. 等差数列的单调性:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若公差 $d>0$,则数列 $\{a_n\}$ 为________数列;若公差 $d<0$,则数列 $\{a_n\}$ 为________数列.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=kn+b$(k,b 为常数),则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列. ( )

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ n+1, n\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $\{a_n\}$ 是等差数列. ( )

(3)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_n=3n+8$,则等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是3. ( )

(4)各项都为正数的等差数列的公差一定大于0. ( )

2. (1)若已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和第二项 a_2,可以求其通项公式吗?

(2)等差数列的通项公式一定是关于 n 的一次函数吗?

课中探究

◆ 探究点一　用定义判断等差数列

例 1 判断下列数列是否为等差数列,如果是,指出它的公差.

(1)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=3n+2$;

(2)在数列$\{b_n\}$中,$b_n=n^2+n$;

(3)在数列$\{c_n\}$中,$c_n=8$.

变式 (1)(多选题)下列数列中为等差数列的是(　　)

A. 9,9,9,9,9

B. 4,7,10,13,16

C. ln 3,ln 9,ln 27,ln 81

D. $2^5,2^4,2^3,2^2$

(2)已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=\frac{1}{2}$,$a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$.

证明:数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列.

[素养小结]

利用定义法判断是否为等差数列时,从第 2 项起检验每一项与它的前一项的差是否都等于同一个常数,若是同一个常数,则是等差数列,否则不是等差数列.

◆ 探究点二　等差中项及其应用

例 2 (1)若$a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,$b=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,则a,b的等差中项为　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)在-1与 7 之间依次插入三个数a,b,c,使这五个数成等差数列,则这个数列为________.

变式 (1)已知$2m$和n的等差中项是 5,m和$2n$的等差中项是 4,则m和n的等差中项是________.

(2)一个等差数列的前 4 项是$1,x,a,2x$,则$x=$________,$a=$________.

[素养小结]

三个数a,b,c成等差数列的条件是$b=\frac{a+c}{2}$(或$2b=a+c$),利用该条件可进行等差数列的判定或求解有关等差中项的计算问题.若需证明$\{a_n\}$为等差数列,则可通过证明$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$来实现.

◆ 探究点三　等差数列的通项公式及应用

[探索] 具备哪些条件可以确定等差数列的通项公式?

例 3 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

(1)若$a_1=2$,$d=3$,求a_{10};

(2)若$a_1=3$,$a_n=21$,$d=2$,求n;

(3)若$a_1=12$,$a_6=27$,求d;

(4)若$d=-\frac{1}{3}$,$a_7=8$,求a_1和a_n.

变式 (1)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_5=10$,$a_{12}=31$,则首项$a_1=$________,公差$d=$________.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=8$,且$a_3+a_5=4a_2$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

(3)已知等差数列$\{a_n\}$的前三项和为-3,前三项积为8,则数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

[素养小结]

等差数列通项公式的求法与应用技巧

(1)等差数列的通项公式可由首项与公差确定,所以要求等差数列的通项公式,只需求出首项与公差.

(2)等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$中共含有四个参数,即a_1,d,n,a_n,如果知道了其中的任意三个数,那么就可以由通项公式求出第四个数,这一求未知量的过程,我们通常称之为"知三求一".

例4 (多选题)已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$,则下列说法中正确的是 ( )

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. 数列$\{na_n\}$是递增数列

C. 数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是递减数列

D. 数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列,若$a_1=\dfrac{1}{25}$,且从第10项开始每项都大于1,则此等差数列的公差d的取值范围是________________.

(2)写出一个同时满足①②③的数列$\{a_n\}$的通项公式:$a_n=$________.

①数列$\{a_n\}$是无穷等差数列;

②数列$\{a_n\}$为递减数列;

③数列$\{|a_n|\}$的第5项为最小项.

第2课时 等差数列的性质与应用

【学习目标】

1. 理解等差数列的通项公式,能说出等差数列通项公式的特征,并能灵活求解等差数列的基本量.
2. 能得出等差数列的一些性质,并利用其解决一些简单问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列通项公式的推广与运算性质

两项关系	多项关系(性质)
通项公式的推广:$a_n=a_m+$______(d为公差,$m,n\in\mathbf{N}^*$)	项的运算性质:若$m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则$a_m+a_n=a_p+a_q$. 简记:若下标和相等,则对应项的和相等. 特别地,若$m+n=2k$($m,n,k\in\mathbf{N}^*$),则$a_m+a_n=2a_k$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$. ( )

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,a_k为a_{k-m},a_{k+m}($m<k$,$m,k\in\mathbf{N}^*$)的等差中项. ( )

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_4=a_6$. ( )

(4)在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_4+a_8+a_{12}=120$,则$a_8=40$. ( )

◆ 知识点二 由等差数列构造新数列

1. 构造新数列的基本类型

(1)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,则$\{c+a_n\}$(c为任意常数)是公差为________的等差数列;

(2)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,则$\{c\cdot a_n\}$(c为任意常数)是公差为________的等差数列;

(3)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是公差为d_1,d_2的等差数列,且它们的项数相同,则数列$\{pa_n+qb_n\}$(p,q是常数)是公差为pd_1+qd_2的等差数列.

2. 等差数列部分项的性质

若数列$\{a_n\}$为等差数列,则$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},a_{m+3k},\cdots$($m,k\in\mathbf{N}^*$)仍为等差数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d,取其奇数项组成一个新数列,则此数列是公差为$2d$的等差数列. ( )

(2)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则数列$\{a_n+3\}$的公差为$d+3$. ( )

(3)若$\{a_n\}$是等差数列,则数列$\{2a_n\}$也是等差数列. ( )

(4)若数列 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 和 $a_2,a_4,a_6,\cdots$ 都是公差为 d 的等差数列，则 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 也是等差数列．（　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差数列性质的应用

例 1 (1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3+a_9=12$，$a_2=4$，则 $a_{10}=$（　）

A. 4　　B. 8

C. 3　　D. 6

(2)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3+a_6+a_{20}+a_{23}=36$，则 $a_{13}=$________．

(3)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{15}=8$，$a_{60}=20$，则 $a_{75}=$________．

变式 (1)[2024·河北保定高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_4+a_6=-20$，则 $a_8=$（　）

A. -12　　B. -13

C. -22　　D. -23

(2)公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4-a_x=a_y-a_7$，则 xy 的值不可能是（　）

A. 10　　B. 24

C. 22　　D. 30

(3)若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)$，则 $a_{p+q}=$________．

[素养小结]

(1)灵活利用等差数列的性质，可以减少运算．令 $m=1$，$a_n=a_m+(n-m)d$ 即变为 $a_n=a_1+(n-1)d$，可以减少记忆负担．

(2)等差数列运算的两种常用思路

①基本量法：根据已知条件，列出关于 a_1,d 的方程(组)，确定 a_1,d，然后求其他量．

②巧用性质法：观察等差数列中项的序号，若满足 $m+n=p+q=2r(m,n,p,q,r\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q=2a_r$．

◆ 探究点二　由等差数列构造新等差数列

例 2 在无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1=3$，公差 $d=-5$，依次取出序号能被 4 除余 3 的项组成数列 $\{b_n\}$．

(1)求 b_1 和 b_2．

(2)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(3)数列 $\{b_n\}$ 中的第 506 项是 $\{a_n\}$ 中的第几项？

变式 (1)已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，且 $a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，那么数列 $\{a_n+b_n\}$ 的第 37 项为____________．

(2)[2024·宁波镇海中学高二期中] 已知等差数列 $-2,1,4,7,10,\cdots$，现在其每相邻两项之间插入一个数，使之成为一个新的等差数列 $\{a_n\}$．

①求新数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

②16 是新数列 $\{a_n\}$ 中的项吗？若是，求出是第几项；若不是，说明理由．

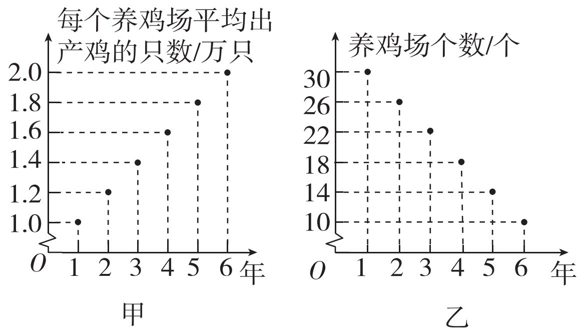
[素养小结]

对于任何形式的构造数列，判断其是否为等差数列，一般从两个方面进行：(1)定义，即 $a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$ 是否为常数；(2)通项公式是否为关于 n 的一次函数．

拓展 已知两个等差数列 2,5,8,…,197 与 2,7,12,…,197,将它们的公共项从小到大依次排列构成数列$\{c_n\}$,则数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=$________,$\{c_n\}$的项数是________.

◆ 探究点三 等差数列的实际应用

例 3 甲、乙两人连续 6 年对某县养鸡业规模进行调查,提供两个不同的信息图如图所示.甲调查表明:每个养鸡场平均出产鸡的只数从第 1 年的 1 万只增加到第 6 年的 2 万只.乙调查表明:养鸡场个数从第 1 年的 30 个减少到第 6 年的 10 个.



请根据提供的信息回答下列问题:

(1)求第 2 年该县养鸡场的个数及出产鸡的总只数.

(2)到第 6 年该县的养鸡业规模(出产鸡的总只数越多,规模越大)比第 1 年是扩大了还是缩小了?请说明理由.

(3)该县这 6 年中哪一年的养鸡业规模最大?哪一年的养鸡业规模最小?请说明理由.

变式 (1)(多选题)已知冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气的日影长依次成等差数列,若冬至、立春、春分的日影长的和是 37.5 尺,芒种的日影长为 4.5 尺,则 ( )

A. 冬至的日影长最长,为 15.5 尺

B. 立夏比谷雨的日影长多 1 尺

C. 大寒、雨水、春分的日影长成等差数列

D. 清明的日影长为 8.5 尺

(2)某公司经销一种数码产品,第 1 年可获利 200 万元.从第 2 年起,由于市场竞争等方面的原因,其利润每年比上一年减少 20 万元,按照这一规律,如果公司不开发新产品,也不调整经营策略,从哪一年起,该公司经销这一产品将亏损?

[素养小结]

求解等差数列实际应用问题的关键是认真审题,挖掘出“等差”变化的含义,进一步明确首项、公差、项数等基本量.

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式

第 1 课时 等差数列的前 n 项和公式及性质

【学习目标】

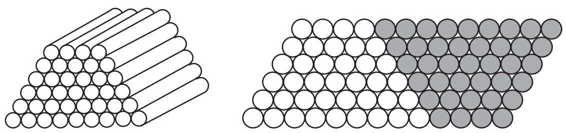
1. 能推导等差数列的前 n 项和公式,能说出"倒序相加法"的特点、适用条件及操作步骤.
2. 能说明等差数列前 n 项和公式的特征,能灵活运用求和公式解决一些简单问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 倒序相加法

如果一个数列$\{a_n\}$中,与首末项等"距离"的两项之和等于首末两项之和,那么求和时可采用把正着写与倒着写的两个和式相加,这样就得到了一个常数列的和,进而求得数列$\{a_n\}$的前 n 项和,这一求和方法称为________.

【诊断分析】如图所示,某仓库堆放了一堆钢管,最上面的一层有 4 根钢管,下面的每一层都比上一层多 1 根,最下面的一层有 9 根,共有 6 层.



(1)假设在这堆钢管旁边倒放上同样的一堆钢管,其截面如图所示,则这样共有______根钢管.

(2)原来有______根钢管.

◆ 知识点二 等差数列的前 n 项和公式

1. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n=$______	$S_n=$______

2. 两个公式的关系:把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$,就可以得到 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则当 $n\geqslant 2$ 时,等差数列$\{a_n\}$的前 $n-1$ 项的和 $S_{n-1}=(n-1)a_1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}d$. ( )

(2)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式是关于整数 n 的二次函数. ( )

(3)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式的常数项为 0. ( )

(4)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_n 与 a_n 不可能相等. ( )

◆ 知识点三 等差数列的前 n 项和的性质

1. 若数列$\{a_n\}$是等差数列,S_n 是其前 n 项和,$k\in\mathbf{N}^*$,那么______,______,______成等差数列,如图所示.

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$$

2. 若 S_n,T_n 分别为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和,则$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

3. 若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列,且公差为$\dfrac{d}{2}$.

4. 设数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,$S_{奇}$ 是前 n 项中奇数项的和,$S_{偶}$ 是前 n 项中偶数项的和,则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=S_{奇}+S_{偶}$. 当等差数列的项数 n 为奇数时,中间一项记为 $a_{中}$. 有如下性质:

(1)当 n 为偶数时,$S_{偶}-S_{奇}=$______;

(2)当 n 为奇数时,$S_{奇}-S_{偶}=$______,$S_{奇}=$______,$S_{偶}=$______,$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=$______.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若$\{a_n\}$是等差数列,则 $a_1+a_2+a_3$,$a_4+a_5+a_6$,$a_7+a_8+a_9$ 也是等差数列. ( )

(2)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_4,S_8,S_{12} 成等差数列. ( )

(3)等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$,则$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{21}{32}$. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差数列的前 n 项和的基本运算

例1 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为S_n.

(1)若 $a_1=7$，$a_{50}=101$，则 $S_{50}=$________；

(2)若 $a_1=1$，$a_4=7$，则 $S_9=$________；

(3)若 $a_1=\frac{3}{2}$，$d=-\frac{1}{2}$，$S_n=-15$，则 $n=$________，$a_n=$________；

(4)若 $a_1=1$，$a_n=-512$，$S_n=-1022$，则 $n=$________，$d=$________.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=2$，且 $a_4+a_{19}=0$，则 $S_{21}=$　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)[2024·东莞实验中学高二月考] 记 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=S_4=-4$.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式；

②求使 $S_n>a_n$ 成立的 n 的最小值.

[素养小结]

1. 等差数列的五个基本量 a_1，a_n，d，n，S_n 中知三可求其二.

2. 若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$.

拓展 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_3=98$，$a_6=86$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和.

◆ 探究点二　等差数列的前 n 项和的性质及应用

例2 (1)已知一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32∶27，求公差 d.

(2)设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$\frac{S_6}{S_3}=4$，求$\frac{S_9}{S_6}$.

(3)已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=-2023$，$\frac{S_{2020}}{2020}-\frac{S_{2024}}{2024}=-4$，求 S_{2024}.

变式 (1)已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为等差数列,其前n项和分别为S_n,T_n,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$,则$\frac{a_5}{b_5}=$________.

(2)已知S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_3=3$,$S_6=24$,则$S_{12}=$________.

[素养小结]

(1)涉及一个有限的等差数列的奇数项和与偶数项和之比的问题,宜用等差数列前n项和的性质求解.

(2)涉及两个等差数列有限项和之比的问题,通常是将其转化为两个等差数列前n项和之比来处理.

(3)涉及等差数列中与$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$有关的问题,可利用$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列解决.

第2课时　等差数列的前n项和的最值与应用

【学习目标】

1. 理解等差数列前n项和的性质.
2. 会求等差数列前n项和的最值.
3. 能在具体的问题情境中发现数列的等差关系,抽象出等差数列模型,并应用该模型解决相关问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点　等差数列的前n项和的最值

1. 从二次函数的角度理解等差数列的前n项和公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$可化成关于$n$的表达式:$S_n=$____________________.当$d\neq0$时,$S_n$关于$n$的表达式是一个常数项为零的二次表达式,即点$(n,S_n)$在其相应的________函数的图象上,这就是说等差数列的前n项和公式是关于n的二次函数,它的图象是抛物线$y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$上横坐标为正整数的一群孤立的点.

2. 等差数列前n项和的最值

(1)利用邻项变号法:

当$a_1>0$,$d<0$时,S_n有________值,使S_n取到最值的n可由不等式组____________确定;

当$a_1<0$,$d>0$时,S_n有________值,使S_n取到最值的n可由不等式组____________确定.

(2)利用二次函数的最值:

$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,$n\in\mathbf{N}^*$,若$d\neq0$,则从二次函数的角度看:当$d>0$时,$S_n$有______值;当$d<0$时,$S_n$有______值.当$n$取最接近对称轴的正整数时,$S_n$取到最值.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0$,$a_7+a_{10}<0$,则当$n=7$时,数列$\{a_n\}$的前n项和最大.(　　)

(2)若$a_1>0$,$d<0$,则等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n有最大值,且最大值就是所有正项之和,也是所有非负项之和.(　　)

(3)在数列$\{a_n\}$中,若$a_1=32$,$a_{n+1}=a_n-4$,则前n项和S_n取得最大值时n的值有两个.(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差数列的前n项和的最值

[探索] 等差数列的前n项和都有最大值与最小值吗?

例1 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1=25$,$S_{17}=S_9$,求S_n的最大值.

变式 (1)[2024·天津新华中学高二月考] 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$,且$a_1=13$,$a_2=11$,则当S_n取得最大值时,$n=$(　　)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

(2)(多选题)已知递减的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_5=S_9$,则 ( )

A. $a_7>0$　　B. S_n的最大值为S_7

C. $S_{14}>0$　　D. $S_{13}>0$

[素养小结]

求等差数列前n项和最值的常用思路:

(1)利用等差数列的增减性,求出其正、负转折项,便可求得前n项和的最值;

(2)利用性质求出其正、负转折项,便可求得前n项和的最值;

(3)利用等差数列的前n项和$S_n=An^2+Bn$(A,B为常数,且$A\neq0$)为关于n的二次函数,结合二次函数的性质求最值.

◆ 探究点二　等差数列前n项和的实际应用

例2　为鼓励应届毕业大学生自主创业,国家对应届毕业大学生创业贷款有贴息优惠政策.现有应届毕业大学生甲贷款开小型超市,初期投入为72万元,经营后每年的总收入为50万元,并且第n年的超市维护和工人工资等费用为a_n万元,其中$\{a_n\}$是首项为12,公差为4的等差数列.

(1)该超市第几年开始盈利?

(2)该超市经营多少年时年平均盈利最大?最大是多少?

变式　(1)据有关文献记载,我国古代一座九层塔共挂了126盏灯,且相邻两层中的下一层灯的盏数比上一层灯的盏数都多n(n为常数),底层灯的盏数是顶层灯的盏数的13倍,则该塔的底层共有灯 ( )

A. 39盏　B. 42盏　C. 26盏　D. 13盏

(2)甲、乙两个机器人分别从相距70米的两处同时相向运动,甲第1分钟走2米,以后每分钟比前1分钟多走1米,乙每分钟均走5米.若甲、乙到达对方起点后立即返回,则它们第二次相遇需要经过________分钟.

[素养小结]

(1)解决与等差数列前n项和有关的应用题的关键是构造合适的等差数列.

(2)遇到与正整数有关的应用题时,可以考虑与数列知识联系,抽象出数列的模型,并用有关知识解决相关的问题,是数学建模的核心素养的体现.

4.3　等比数列

4.3.1　等比数列的概念

第1课时　等比数列的概念与通项公式

【学习目标】

1. 理解等比数列的概念,能用文字语言、符号语言、图形语言描述等比数列的概念,能根据等比数列的定义判断或证明已知数列是否是等比数列.

2. 理解等比数列的通项公式,能根据定义归纳出等比数列的通项公式,会用通项公式解决一些简单问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　等比数列的相关概念

1. 等比数列与公比

一般地,如果一个数列从________起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列叫作________数列,这个常数叫作等比数列的________,公比通常用字母 q 表示(显然 $q\neq0$).

以上定义用符号表示为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 或 $a_{n+1}=qa_n$(q 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$).等比数列的定义用符号语言表示,其本质是等比数列的递推公式.

2. 等比中项

(1)定义:如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,那么 G 叫作 a 与 b 的________,此时,$G^2=$________.

(2)推广:在等比数列$\{a_n\}$中,从第 2 项起,每一项都是相邻两项的等比中项.

特别地,等比数列$\{a_n\}$中的某一项 a_k 是与该项等距离的两项 a_{k-m},a_{k+m}($k>m$)的等比中项,即 $a_k^2=a_{k-m}\cdot a_{k+m}$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)数列 1,−1,1,−1 是等比数列. (　　)

(2)若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=2a_n$($n\in\mathbf{N}^*$),那么$\{a_n\}$是等比数列. (　　)

(3)若一个数列从第 2 项起每一项与前一项的比为常数,则该数列为等比数列. (　　)

(4)等比数列的首项、公比均不能为零. (　　)

(5)$G^2=ab$ 是 a,G,b 成等比数列的充要条件. (　　)

◆ 知识点二　等比数列的通项公式

1. 通项公式

首项为 a_1,公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为____________.

2. 等比数列的通项公式与指数型函数的关系

(1)在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=a_1q^{n-1}$ 可改写成 $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$,当 $q>0$ 且 $q\neq1$ 时,$y=q^x$ 是一个________函数,此时等比数列$\{a_n\}$的图象是函数 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$ 的图象上____________.

(2)任给函数 $f(x)=ka^x$(k,a 为常数,$k\neq0$,$a>0$ 且 $a\neq1$),则 $f(1)=ka$,$f(2)=ka^2$,…,$f(n)=ka^n$,…构成一个等比数列$\{ka^n\}$,其首项为________,公比为________.

3. 等比数列的单调性

由指数函数的性质可知,

当 $a_1>0$,$q>1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;

当 $a_1<0$,$0<q<1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;

当 $a_1>0$,$0<q<1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递减数列;

当 $a_1<0$,$q>1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递减数列;

当 $q<0$ 时,等比数列$\{a_n\}$是摆动数列;

当 $q=1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是常数列.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=2$,$a_5=8$,则 $a_3=\pm4$. (　　)

(2)等比数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$中,第 10 项为$\frac{1}{2^9}$. (　　)

(3)已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1>0$,$8a_2-a_5=0$,则数列$\{a_n\}$为递增数列. (　　)

(4)如果在等比数列$\{a_n\}$中,公比为 q,且 $q<1$,那么等比数列$\{a_n\}$是递减数列. (　　)

2. 如何推导等比数列$\{a_n\}$的通项公式?

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等比数列通项公式的基本运算

[探索] 具备哪些条件可以确定等比数列的通项公式?

例 1 (1)已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=128$,$a_1=4$,$q=2$,则$n=$________.

(2)已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_4=27$,则$a_n=$________.

(3)已知等比数列$\{b_n\}$满足$b_1+b_2=3$,$b_1+b_4=9$,则$q=$________.

(4)已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=625$,$n=4$,$q=5$,则$a_1=$________.

变式 (1)在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_3-a_2=3$,$a_5-a_3=18$,则$a_5=$ ( )

A. 16　B. $\frac{81}{4}$　C. 24　D. $\frac{81}{2}$

(2)已知数列$\{a_n+2^n\}$是等比数列,且$a_1=0$,$a_2=4$,则$a_6=$ ( )

A. 1984　B. 1920

C. 992　D. 960

(3)三个数成等比数列,它们的和等于14,它们的积等于64,则这三个数所成的等比数列为____________.

[素养小结]

1. 等比数列的通项公式涉及4个量a_1,a_n,n,q,只要知道其中任意三个就能求出另外一个,在这四个量中,a_1和q是等比数列的基本量,只要求出这两个基本量,问题便迎刃而解.

2. 求等比数列$\{a_n\}$的通项公式通常有以下两种方法:

(1)根据已知条件,建立关于a_1,q的方程组,求出a_1,q后再求a_n,这是常规方法.

(2)充分利用各项之间的关系,直接求出q后,再求a_1,最后求a_n,这种方法带有一定的技巧性,能简化运算.

◆ 探究点二　等比数列的函数特征

例 2 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$\{a_n\}$为递减数列的充要条件是 ( )

A. $|q|<1$且$q\neq0$

B. $a_1>0$,$0<q<1$

C. $a_1<0$,$q>1$

D. $a_1>0$,$0<q<1$或$a_1<0$,$q>1$

变式 (1)设$\{a_n\}$是等比数列,则"$a_1<a_2$"是"数列$\{a_n\}$是递增数列"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)已知$\{a_n\}$是递增的等比数列,且$a_2<0$,则其公比q满足 ( )

A. $q<-1$　B. $-1<q<0$

C. $q>1$　D. $0<q<1$

◆ 探究点三　等比中项及其应用

例 3 (1)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_4=1$,$a_8=16$,则$a_6=$ ( )

A. ±4　B. 4

C. -2　D. -4

(2)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1a_2=3$,$a_7a_8=27$,则$a_4a_5=$________.

变式 (1)$\sqrt{5}-2$和$\sqrt{5}+2$的等差中项与等比中项分别为 ( )

A. $\sqrt{5}$,±2　B. 2,$\pm\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$,±1　D. 1,$\pm\sqrt{5}$

(2)若a,b,c成等比数列,x是a,b的等比中项,y是b,c的等比中项,则 ( )

A. $x>y$　B. $x<y$

C. a,b,c同号　D. x与y同号

(3)已知等比数列$\{a_n\}$中的前三项为a,$2a+2$,$3a+3$,则实数a的值为________.

[素养小结]

(1)首项a_1和公比q是等比数列的基本量,从基本量入手可以解决等比数列相关的基本量问题;(2)若没有特殊说明,则a与$b(ab>0)$的等比中项一般有2个,需要根据已知条件判断.

◆ 探究点四　等比数列的证明

例 4 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1$,$b_n=a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证:$\{b_n\}$是等比数列;

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.